



TITLE:

# Second Order Asymptotic Bounds for the Concentration Probability of Estimators in a Family of Truncated Distributions(Asymptotic Methods of Statistics)

AUTHOR(S):

赤平, 昌文

---

CITATION:

赤平, 昌文. Second Order Asymptotic Bounds for the Concentration Probability of Estimators in a Family of Truncated Distributions(Asymptotic Methods of Statistics). 数理解析研究所講究録 1988, 645: 37-51

ISSUE DATE:

1988-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100253>

RIGHT:

Second Order Asymptotic Bounds for the Concentration Probability  
of Estimators in a Family of Truncated Distributions

赤平昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに

非正則な場合に、推定量の2次の漸近有効性については、従来、切断正規分布、両側指数分布、さらに cusps をもつ連続な密度関数をもつ分布族等のときに論じられた ([2], [3], [5]).

ここでは一般の切断分布族の場合に、一般ベイズ推定量の2次の漸近分布を求め、さらに漸近中央値不偏推定量のクラスの中でそれらの集中確率の限界を  $3/2$  次および2次の order まで求める。また推定量の2次の漸近有効性についても考察する。

1. 一般ベイズ推定量の2次の漸近分布

$X_1, \dots, X_n$  をたがいに独立に、いずれも (ある  $\sigma$ -有限測度  $\mu$  に関して絶対連続な) 密度関数  $f(x, \theta)$  ( $\theta \in \mathcal{H}$ ) に従う実確率変数とする。ここで  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^1$  とし、 $\theta$  が位置母数である、すな

わち  $f(x, \theta) = f(x - \theta)$  である場合を考える。さらに次の条件を仮定する。

$$(A.1) \quad \begin{aligned} f(x) > 0, & \quad a < x < b \text{ のとき,} \\ f(x) = 0, & \quad x \leq a, x \geq b \text{ のとき} \end{aligned}$$

(A.2)  $f(x)$  は開区間  $(a, b)$  において 2 回連続微分可能で

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = c \quad \text{である。ただし } c \text{ はある正の定数とする。}$$

$$(A.3) \quad I = \int_a^b \frac{\{f'(x)\}^2}{f(x)} d\mu(x) < \infty.$$

上のような設定の下では、一致性の order は  $n$  となることが知られている ([1])。

$$\text{また } \underline{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - b, \quad \bar{\theta} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i - a \quad \text{とすれば,}$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) > 0, \quad \underline{\theta} < \theta < \bar{\theta} \text{ のとき,}$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) = 0, \quad \text{その他のとき}$$

となる。  $L(u)$  を  $R^1$  上で定義された 3 回連続微分可能で、 $|u|$  の単調増加な非負値関数とする。このとき損失  $L$  とルベーク測度に関する一般ベイズ推定量は、ほとんどすべての  $\tilde{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  について

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} L(\hat{\theta} - \theta) \prod_{j=1}^n f(x_j - \theta) d\theta$$

を最小にする  $\hat{\theta}$  になる。

次に  $a < x < b$  に対して  $l(x) = \log f(x)$  とおいて  $l^{(j)}(x) = (d^j/dx^j) l(x)$  ( $j=1, 2$ ) とするとき

$$Z_1 = (-1/\sqrt{n}) \sum_{j=1}^n l^{(1)}(x_j), \quad Z_2 = (1/\sqrt{n}) \sum_{j=1}^n l^{(2)}(x_j) + \sqrt{n} I$$

によって定義する. ここでさらに  $(d/du) L(0) = 0$  であると仮定する.

定理 1.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) の下で、損失  $L$  とルベーク測度に関する一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  は次の stochastic expansion をもつ.

$$n(\hat{\theta}_{GB} - \theta) = S + \frac{1}{3\sqrt{n}} Z_1 T^2 - \frac{I}{3n} S T^2 - \frac{b_3}{6b_2 n} T^2 + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

ここで  $S = n(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$ ,  $T = n(\bar{\theta} - \underline{\theta})/2$ ,  $b_j = (d^j/du^j) L(0)$  ( $j=2, 3$ ) とする.

証明については、一般ベイズ推定量が

$$\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} L^{(1)}(\hat{\theta} - \theta) \prod_{j=1}^n f(x_j - \theta) d\theta = 0$$

の解  $\hat{\theta}$  として与えられることから、 $\hat{\theta}$  の漸近展開が得られる ([4]). ただし  $L^{(1)}(u) = (d/du) L(u)$  とする.

定理 1.2. 条件 (A.1) ~ (A.3) の下で、一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  の特性関数は  $n^{-1}$  の order まで次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_n(t) &= E[e^{2c i t n(\hat{\theta}_{GB} - \theta)}] \\ &= \phi_0(t) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^3 \alpha_j \phi_j(t) + \frac{1}{12c^2 n} \sum_{j=0}^3 i \beta_j t \phi_j(t) - \frac{1}{18c^2 n} \sum_{j=0}^4 \gamma_j t^2 \phi_j(t) \\ &\quad + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha_0 = \frac{1}{12c^2}(h^- + 2I), \quad \alpha_1 = 1 + \frac{1}{12c^2}(5h^- - 2I), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4c^2}(2h^- - I),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{12c^2}(h^- - I), \quad \beta_0 = \beta_1 = -(h^+ + \frac{2b_3c}{b_2}), \quad \beta_2 = -(2h^+ + \frac{b_3c}{b_2}),$$

$$\beta_3 = h^+, \quad \gamma_0 = \gamma_1 = 6h^-, \quad \gamma_2 = 3h^-, \quad \gamma_3 = I, \quad \gamma_4 = \frac{I}{4},$$

$$\phi_0(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad \phi_1(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \quad \phi_2(t) = \frac{2(1-3t^2)}{(1+t^2)^3},$$

$$\phi_3(t) = \frac{6(1-6t^2+t^4)}{(1+t^2)^4}, \quad \phi_4(t) = \frac{24(1-10t^2+5t^4)}{(1+t^2)^5},$$

$$h^+ = f'(a+0) + f'(b-0), \quad h^- = f'(a+0) - f'(b-0)$$

で、 $i$  は虚数単位とする。

証明については、定理 1.1 で得られた一般ベイズ推定量の stochastic expansion を用いて、その特性関数を  $n^{-1}$  の order まで求めることができる。

定理 1.2 から、一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  の特性関数は、Fisher 情報量  $I$  および  $f(x)$  の台の端点  $a, b$  での左右の微分係数  $f'(a-0), f'(b+0)$  の和  $h^+$ , 差  $h^-$  に依存していることが分かる。このことから  $\hat{\theta}_{GB}$  の 2 次の漸近挙動は、端点  $a, b$  では  $h^+, h^-$  を通して、また区間  $(a, b)$  の中では  $I$  を通して行われることが分かる。

系 1.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) の下で、 $2cn(\hat{\theta}_{GB} - \theta)$  の漸近密度は  $n^{-1}$  の order まで次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(x) = & g_{00}(x) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^3 \alpha_j g_{0j}(x) + \frac{1}{12c^2n} \sum_{j=0}^3 \beta_j g_{1j}(x) - \frac{1}{18c^2n} \sum_{j=0}^4 \gamma_j g_{2j}(x) \\ & + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ここで  $\alpha_j, \beta_j (j=0, 1, 2, 3), \gamma_j (j=0, 1, 2, 3, 4)$  は 定理 1.2 で与えられたもので

$$g_{0j}(x) = \frac{1}{2} |x|^j e^{-|x|} \quad (j=0, 1, 2, 3)$$

$$g_{10}(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) e^{-|x|}, \quad g_{11}(x) = \frac{1}{2} (x - \operatorname{sgn} x) e^{-|x|},$$

$$g_{12}(x) = \left(\frac{x^2}{2} \operatorname{sgn} x - x\right) e^{-|x|}, \quad g_{13}(x) = \frac{x^2}{2} (x - 3 \operatorname{sgn} x) e^{-|x|},$$

$$g_{20}(x) = -\frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad g_{21}(x) = -\left(\frac{|x|}{2} - 1\right) e^{-|x|},$$

$$g_{22}(x) = -\left(\frac{x^2}{2} - 2|x| + 1\right) e^{-|x|}, \quad g_{23}(x) = -\left(\frac{|x|^3}{2} - 3x^2 + 3|x|\right) e^{-|x|}$$

$$g_{24}(x) = -\left(\frac{x^4}{2} - 4|x|^3 + 6x^2\right) e^{-|x|}$$

とする。

証明は定理 1.2 と フーリエ 逆変換を用いて得られる。

系 1.2. 条件 (A.1) ~ (A.3) の下で、 $n(\hat{\theta}_{GB} - \theta)$  の漸近密度は  $n^{-1}$  の order まで次のようになる。

$$g_n(x) = c e^{-2c|x|} \left[ 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^3 (2c)^j \alpha_j |x|^j + \frac{1}{12c^2n} \{ 6ch^+x + 8c^3h^+x^3 \right]$$

$$-(5h^+ + \frac{b_3 c}{b_2}) \operatorname{sgn} x \} - \frac{1}{9c^2 n} \{ 6c(h^- - I)|x| - 6c^2(h^- - I)x^2 + 4c^3 I|x|^3 - 2c^4 Ix^4 \} ] + o(\frac{1}{n})$$

ただし  $\alpha_j$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ) は、定理 1.2 で与えられたものとする。

証明は系 1.1 から直接得られる。

系 1.3. 条件 (A.1) ~ (A.3) が成り立つと仮定する。さらに  $b_3 = h^+ = 0$  ならば、 $n(\hat{\theta}_{GB} - \theta)$  の漸近密度は  $n^{-1}$  の order まで次のようになる。

$$g_n(x) = c e^{-2c|x|} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^4 k_j |x|^j \right\} + o(\frac{1}{n}),$$

ここで  $k_0 = \frac{1}{12c^2} (h^- + 2I)$ ,  $k_1 = 2c + \frac{1}{6c} (h^- + 2I)$ ,

$$k_2 = -2c^2 - \frac{1}{3} (4h^- - I), \quad k_3 = \frac{2}{9} c (3h^- - 5I), \quad k_4 = \frac{2}{9} c^2 I$$

とする。

証明は、系 1.2 において  $b_3 = h^+ = 0$  とすることによって導かれる。

$f(x)$  が  $x = (a+b)/2$  の周りで対称ならば、 $h^+ = 0$  という条件は満たされる。

定理 1.3. 系 1.3 と同じ条件の下で、一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  について

$$P_\theta \{ n|\hat{\theta}_{GB} - \theta| \leq t \} = 1 - e^{-2ct} + \frac{1}{n} e^{-2ct} \left[ \frac{1}{6c} (h^- + 2I)t + \left\{ 2c^2 + \frac{1}{3} (h^- + 2I) \right\} t^2 \right]$$

$$-\frac{2}{3}C(h^{-1}I)t^3 - \frac{2}{9}C^2It^4] + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (t > 0)$$

が成り立つ.

証明は系 1.3 から直接得られる.

## 2. 推定量の集中確率の $3/2$ 次の限界

一般に、任意の実数  $k (\geq 1)$  について、 $\theta$  の  $n$ -致推定量が  $k$  次の漸近中央値不偏であるとは、任意の  $\theta \in \Theta$  に対してある正数  $\delta$  が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} n^{k-1} \left| P_\theta \{ \hat{\theta}_n \leq \theta \} - \frac{1}{2} \right| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} n^{k-1} \left| P_\theta \{ \hat{\theta}_n \geq \theta \} - \frac{1}{2} \right| = 0$$

が成り立つことであると定義する.  $\mathcal{A}_k$  を  $k$  次の漸近中央値不偏推定量全体とする.  $\hat{\theta}_n^* \in \mathcal{A}_k$  が  $k$  次の両側漸近的有効であるとは、任意の  $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_k$ , 任意の  $\theta \in \Theta$ , 任意の  $t > 0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} \left[ P_\theta \{ n | \hat{\theta}_n^* - \theta | \leq t \} - P_\theta \{ n | \hat{\theta}_n - \theta | \leq t \} \right] \geq 0$$

が成り立つことであると定義する.

ここで  $f(x)$  が  $x = (a+b)/2$  の周りで対称であることを仮定する. このとき、 $k=3/2$  の場合に  $\mathcal{A}_k$  の推定量の集中確率の限界は、 $3/2$  次の order まで次のように得られる.



定理 2.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) の下で、任意の  $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_{3/2}$  ,  
 任意の  $\theta \in \Theta$  , 任意の  $t > 0$  に対して

$$P_{\theta}\{n|\hat{\theta}_n - \theta| \leq t\} \leq 1 - e^{-2ct} + \sqrt{\frac{2I}{\pi n}} t e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

が成り立つ.

証明の概略は、基本的に次節の定理 3.1 と同様である.

定理 2.2. 条件 (A.1) ~ (A.3) が成り立つと仮定する. さ  
 らに  $I > 0$  ならば、 $\theta$  の一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  は  $3/2$  次の  
 両側漸近的有効でない.

証明の概略.  $I > 0$  ならば、定理 2.1 において与えられ  
 た限界の  $n^{-1/2}$  の order の項の係数は正である. 一方、定理  
 1.3 から一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  の集中確率には  $n^{-1/2}$  の order  
 の項は存在せず、次の order は  $n^{-1}$  であるから、 $\hat{\theta}_{GB}$  の集中確  
 率はその限界を  $n^{-1/2}$  の order、すなわち  $3/2$  次の order ま  
 で達成できない.

$I = 0$  であるための必要十分条件は、 $f(x)$  が区間  $(a, b)$  上の  
 一様になることであるから、この場合には、定理 1.3、定理  
 2.1 から一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  の集中確率は  $o(n^{-1/2})$  まで  
 一致するから、 $\hat{\theta}_{GB}$  は  $3/2$  次の両側漸近有効推定量になる.

次に  $I > 0$  のときに、 $\theta$  の最尤推定量の漸近挙動について  
 考察する.

まず  $\sum_{j=1}^n (\partial/\partial \theta) \log f(x_j - \hat{\theta}_0) = 0$  を満たす  $\hat{\theta}_0$  をとる. このとき推定量  $\hat{\theta}^*$  を

$$\hat{\theta}^* = \begin{cases} \underline{\theta}, & \hat{\theta}_0 \leq \underline{\theta} \text{ のとき,} \\ \bar{\theta}, & \hat{\theta}_0 \geq \bar{\theta} \text{ のとき,} \\ \hat{\theta}_0, & \underline{\theta} < \hat{\theta}_0 < \bar{\theta} \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義すると、これは  $\theta$  の最尤推定量になる. そこでその集中確率は  $n^{-1/2}$  の order まで次のように求められる.

$$\begin{aligned} & P_{\theta_0} \{n|\hat{\theta}^* - \theta_0| \leq t\} \\ &= P_0 \{n|\hat{\theta}^*| \leq t\} = P_0 \{-tn^{-1} \leq \hat{\theta}^* \leq tn^{-1}\} \\ &= P_0 \{-tn^{-1} \leq \hat{\theta}^* \leq tn^{-1}, \hat{\theta}_0 \leq \underline{\theta}\} + P_0 \{-tn^{-1} \leq \hat{\theta}^* \leq tn^{-1}, \hat{\theta}_0 \geq \bar{\theta}\} \\ &\quad + P_0 \{-tn^{-1} \leq \hat{\theta}^* \leq tn^{-1}, \underline{\theta} < \hat{\theta}_0 < \bar{\theta}\} \\ &= P_0 \{-tn^{-1} \leq \underline{\theta} \leq 0, \hat{\theta}_0 \leq \underline{\theta}\} + P_0 \{0 \leq \bar{\theta} \leq tn^{-1}, \hat{\theta}_0 \geq \bar{\theta}\} \\ &\quad + P_0 \{\max(-tn^{-1}, \underline{\theta}) < \hat{\theta}_0 < \min(tn^{-1}, \bar{\theta})\} \\ &= 1 - e^{-ct} + \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \left( \sqrt{I} + \frac{h}{\sqrt{I}} \right) t e^{-ct} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

ただし  $h = f'(\theta - 0) = -f'(\theta + 0)$  とする.

上の二と定理 2.1 から、 $\hat{\theta}^*$  は 1 次の両側漸近有効推定量で  
すらないことが分かる.

### 3. 推定量の集中確率の2次の限界

推定量のクラス  $\mathcal{A}_2$  の中で、それらの集中確率の限界は2次の order まで次のように得られる。

定理 3.1. 条件 (A.1) ~ (A.3) が成り立つと仮定する。さらに  $f(x)$  が  $x=(a+b)/2$  の周りで対称であれば、任意の  $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_2$ , 任意の  $\theta \in \mathbb{H}$ , 任意の  $t > 0$  に対して

$$P_{\theta}\{n|\hat{\theta}_n - \theta| \leq t\} \leq 1 - e^{-2ct} + \sqrt{\frac{2I}{\pi n}} t e^{-2ct} + \frac{1}{n} \left\{ 2(c^2 - h)t^2 - \frac{\sqrt{I}t}{\sqrt{2\pi}} \right\} e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ。ただし  $h = f'(b-0) = -f'(a+0)$  とする。

注意. 定理 3.1 から 集中確率の2次までの限界は、 $f(x)$  の台  $(a, b)$  の端点  $a, b$  では  $c^2 - h = f^2(a) + f'(a+0)$  を通して  $(a, b)$  の内点では  $I$  を通して影響を受けることが分かる。

定理 3.1 の証明の概略.  $\theta_0 \in \mathbb{H}$  において任意に固定する。 $\mathcal{A}_2$  の中で  $P_{\theta_0}\{n|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq t\}$  を最大にするためには、

$$P_{\theta_0 - tn^{-1/2}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\} = P_{\theta_0 + tn^{-1}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\}$$

を最大にすればよい。Neyman-Pearson の基本定理と同様の方法によって

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1, & \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 + tn^{-1}) > \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 - tn^{-1}) \text{ のとき} \\ 0, & \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 + tn^{-1}) < \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 - tn^{-1}) \text{ のとき} \end{cases}$$

を用いて、その最大値は

$$E_{\theta_0 - tn^{-1}}(\phi_n^*) - E_{\theta_0 + tn^{-1}}(\phi_n^*)$$

によって与えられる。ただし  $\tilde{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  とする。

$$A = \{\tilde{x}_n: \underline{\theta} < \theta_0 - tn^{-1}, \bar{\theta} < \theta_0 + tn^{-1}\}, B = \{\tilde{x}_n: \underline{\theta} > \theta_0 - tn^{-1},$$

$$\bar{\theta} > \theta_0 + tn^{-1}\}, C = \{\tilde{x}_n: \underline{\theta} < \theta_0 - tn^{-1}, \bar{\theta} > \theta_0 + tn^{-1}\},$$

$$D = \{\tilde{x}_n: \bar{z}_1/\sqrt{n} < \theta_0\}, D' = \{\tilde{x}_n: \bar{z}_1/\sqrt{n} > \theta_0\} \text{ とおけば、}$$

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1, & \tilde{x}_n \in A \cup (C \cap D) \text{ のとき、} \\ 0, & \tilde{x}_n \in B \cup (C \cap D') \text{ のとき} \end{cases}$$

になる。このとき、任意の  $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_2$  に対して

$$\begin{aligned} & P_{\theta_0 - tn^{-1}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\} - P_{\theta_0 + tn^{-1}}\{\hat{\theta}_n \leq \theta_0\} \\ & \leq E_{\theta_0 - tn^{-1}}(\phi_n^*) - E_{\theta_0 + tn^{-1}}(\phi_n^*) \\ & = P_{\theta_0 - tn^{-1}}(A) - P_{\theta_0 + tn^{-1}}(A) + P_{\theta_0 - tn^{-1}}(C \cap D) - P_{\theta_0 + tn^{-1}}(C \cap D) \end{aligned}$$

となる。

また  $S = n(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$ ,  $T = n(\bar{\theta} - \underline{\theta})/2$  とおいて、 $S$  と  $T$  の漸近同時密度は

$$f_n(s, t) = \begin{cases} 2c^2 e^{-2ct} \left[ 1 + \frac{1}{n} \left\{ -1 + 4ct + h(t^2 + s^2) - 2c^2 t^2 - \frac{2h}{c} t \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right), & (-t < s < t, 0 < t), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる。このことから

$$\begin{aligned} P_{\theta_0 - tn^{-1}}(A) &= P_{\theta_0 - tn^{-1}}\{\underline{\theta} < \theta_0 - tn^{-1}, \bar{\theta} < \theta_0 + tn^{-1}\} \\ &= P_{\theta_0 - tn^{-1}}\{n(\underline{\theta} - (\theta_0 - tn^{-1})) < 0, n(\bar{\theta} - (\theta_0 - tn^{-1})) < 2t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_0 \{n\bar{\theta} < 0, n\bar{\theta} < 2t\} \\
&= P_0 \{S-T < 0, S+T < 2t\} \\
&= \left( \int_0^t \int_s^{-s+2t} + \int_{-\infty}^0 \int_{-s}^{-s+2t} \right) f_n(t, s) dt ds \\
&= 1 - e^{-2ct} + \frac{2}{n} (c^2 - h) t^2 e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる。同様にして  $P_{\theta_0 + t/n^{-1}}(A) = o(1/n)$  を得る。

また  $S=s, T=t$  が与えられたときの  $Z_1/\sqrt{n} < \theta_0$  となる条件付確率は  $n^{-1}$  の order まで

$$P_{\theta_0 \mp t/n^{-1}} \{Z_1/\sqrt{n} < \theta_0 | s, t\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi I n}} (2hS \pm It) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi I} n} (2hS \mp It) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になるから

$$\begin{aligned}
P_{\theta_0 \mp t/n^{-1}} \{C \cap D\} &= \int_C P_{\theta_0 \mp t/n^{-1}} \{Z_1/\sqrt{n} < \theta_0 | s, t\} f_n(s, t) ds dt \\
&= \frac{1}{2} e^{-2ct} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2I}{\pi n}} t e^{-2ct} \\
&\quad + \frac{1}{n} \left\{ \left( c + \frac{h}{2c} \mp \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{2\pi}} \right) t - \left( c^2 - \frac{h}{2} \right) t^2 \right\} e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる。ただし複号同順とする。従って

$$\begin{aligned}
P_{\theta_0} \{n|\hat{\theta}_n - \theta_0| \leq t\} &\leq 1 - e^{-2ct} + \sqrt{\frac{2I}{\pi n}} t e^{-2ct} \\
&\quad + \frac{1}{n} \left\{ 2(c^2 - h) t^2 - \frac{\sqrt{I} t}{\sqrt{2\pi}} \right\} e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となり、 $\theta_0$  が任意であるから定理 3.1 の結論が得られる。

系 3.1. 定理 3.1 と同じ仮定の下で、 $I=0$  ならば  $\theta$  の一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  は 2 次の両側漸近的有効である。

証明の概略.  $I=0$  のとき  $f(x)$  は  $(a, b)$  上の一様分布であるから  $f'(a-0)=f'(b+0)=0$  より  $h=h^-=0$  となる. 定理 3.1 より  $\mathcal{A}_2$  の推定量の集中確率の限界は

$$1 - e^{-2ct} + \frac{2}{n} c^2 t^2 e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left(c = \frac{1}{b-a}\right)$$

で、一方定理 1.3 より

$$P_{\theta}\{n|\hat{\theta}_{GB} - \theta| \leq t\} = 1 - e^{-2ct} + \frac{2}{n} c^2 t^2 e^{-2ct} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となるから、その限界を一樣に達成する。従って  $\hat{\theta}_{GB}$  は 2 次の両側漸近的有効である。

例 3.1.  $X_1, \dots, X_n$  がたがいに独立に、いずれも次のような対称な切断正規密度

$$f(x-\theta) = \begin{cases} k e^{-(x-\theta)^2/2}, & |x-\theta| < 1 \text{ のとき,} \\ 0, & |x-\theta| \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

をもつ分布に従うとする。ただし  $k$  はある正の定数とする。

このとき  $f(-1+0)=f(1-0)=k e^{-1/2}=c$ ,  $f'(-1+0)=c$ ,

$f'(1-0)=-c$  となる。  $c \doteq 0.36$ ,  $I \doteq 0.28$  であるから 定理

3.1 によって、任意の  $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}_2$ , 任意の  $\theta \in \mathcal{H}$ , 任意の  $t > 0$  に對して

$$P_{\theta}\{n|\hat{\theta}_n - \theta| \leq t\} \leq 1 - e^{-0.72t} + \frac{0.42}{\sqrt{n}} t e^{-0.72t} + \frac{1}{n} e^{-0.72t} (0.98t^2 - 0.21t) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる。一方  $L(u) = u^2$  のとき、定理 1.3 から一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  について

$$P_{\theta}\{n|\hat{\theta}_{GB} - \theta| \leq t\} = 1 - e^{-0.72t} + \frac{1}{n} e^{-0.72t} (0.59t + 0.69t^2 - 0.11t^3 - 0.01t^4) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

となる。従って  $\hat{\theta}_{GB}$  は  $3/2$  次の両側漸近有効推定量でな... ことが分かる。

#### References

- [1] Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE 22, 8-26.
- [2] Akahira, M. (1982). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No.185, Department of Statistics, Stanford University, California.
- [3] Akahira, M. (1988). Second order asymptotic optimality of estimators for a density with finite cusps. To appear in the Annals of the Institute of Statistical Mathematics.
- [4] Akahira, M. (1988). Second order asymptotic properties of the generalized Bayes estimators for a family of non-regular distributions.

To appear in the Proceedings of the 2nd Pacific Area Statistical Conference, Statistical Theory and Data Analysis II, North-Holland, Amsterdam.

- [5] Sugiura, N. and Naing, M. T. (1987). Improved estimators for the location of double exponential distribution. Contributed Papers of 46 Session of ISI, Tokyo, 427-428.